정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

1번 정답 ⑤

1. $3^0 = 1$이고 $3^2 = 9$예요.

2. 따라서 $f(0) + f(2) = 1 + 9 = 10$이에요.

2번 정답 ③

1. 접선의 기울기는 그 점에서의 미분계수예요.
$f'(x) = 4x - 3$이에요.

2. $f'(2) = 8 - 3 = 5$이므로 접선의 기울기는 5예요.

3번 정답 ②

1. 로그의 밑은 $a > 0, a \neq 1$을 만족해야 해요.

2. $\log_a 16 = 4$를 지수로 나타내면 $a^4 = 16$이에요.

3. 양수인 해는 $a = 2$이고 밑의 조건도 만족해요.

4번 정답 ②

1. θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta < 0$이에요.

2. $\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$에서 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$예요.

3. 따라서 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4}$이에요.

5번 정답 ⑤

1. $x \neq 2$이면 $f(x) = x + 2$로 정리돼요.

2. 따라서 $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$예요.

3. 연속이려면 극한값과 함숫값이 같아야 하므로
$k = f(2) = 4$예요.

6번 정답 ④

1. 공차를 d라고 하면 $a_8 - a_3 = 5d = 15$이므로 $d = 3$이에요.

2. $a_1 = a_3 - 2d = 1$이고 $a_{10} = 1 + 9 \times 3 = 28$이에요.

3. 따라서 합은 $\frac{10(1 + 28)}{2} = 145$예요.

7번 정답 ④

1. $2x + 3$의 한 부정적분은 $x^2 + 3x$예요.

2. 따라서 $\int_0^2 (2x + 3)\,dx = (4 + 6) - 0 = 10$이에요.

8번 정답 ③

1. $t = 2^x > 0$으로 놓으면 $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) = 0$이에요.

2. $2^x = 1$이면 $x = 0$, $2^x = 4$이면 $x = 2$예요.

3. 두 해는 모두 원래 방정식을 만족하므로 합은 2예요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

9번 정답 ①

1. 양 끝점 $-1, 4$에서 같은 최댓값을 갖는 경우부터 확인해요. $g(-1) = g(4)$이면 $k = -5$예요. 이때 양 끝의 값은 5이지만 $g(-\frac{1}{2}) = \frac{49}{8} > 5$이므로 두 끝점이 최댓값을 갖는 경우는 아니에요.

2. 삼차함수는 내부에서 극대점을 두 개 가질 수 없어요. 최댓값을 갖는 두 점 중 하나는 내부의 점 r이고, 다른 하나는 끝점이어야 해요.

3. 최댓값을 M이라고 하면 $M - g(r) = 0$, $g'(r) = 0$이므로 $M - g(x)$는 $(x - r)^2$을 인수로 가져요.

4. 다른 점이 -1이면 $M - g(x) = -(x + 1)(x - r)^2$이 되어 내부에서 음수가 돼요. 이는 $M - g(x) \geq 0$에 어긋나므로 다른 점은 4예요.

5. $M - g(x) = (4 - x)(x - r)^2$을 전개해요. x^2의 계수를 비교하면 $4 + 2r = 3$이므로 $r = -\frac{1}{2}$이에요.

6. 상수항을 비교하면 $M - 5 = 4r^2 = 1$이어서 $M = 6$이에요. x의 계수에서는 $9 + k = -8r - r^2 = \frac{15}{4}$이므로 $k = -\frac{21}{4}$이에요.

7. 이제 $g'(x) = \frac{3}{4}(2x + 1)(2x - 5)$예요. 내부 임계점은 $-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$예요.

8. $g(-1) = \frac{19}{4}$, $g(-\frac{1}{2}) = g(4) = 6$, $g(\frac{5}{2}) = -\frac{15}{2}$를 비교하면 최솟값은 $-\frac{15}{2}$예요.

10번 정답 ⑤

1. 수선의 발 H가 변 BC 위에 있는지 먼저 확인해요. A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하고, $BH = u$, $AH = h$라고 해요.

2. $u^2 + h^2 = 25$, $(10 - u)^2 + h^2 = 45$를 빼면 $100 - 20u = 20$이므로 $u = 4$예요. 이어서 $h = 3$이므로 H는 실제로 변 BC 위에 있어요.

3. $AD = AE = \sqrt{13}$이고 $AH = 3$이므로 $HD = HE = \sqrt{13 - 9} = 2$예요. 따라서 $BD = 2$, $BE = 6$이고 $DE = 4$예요.

4. 삼각형 ADE의 넓이는 $\Delta = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$이에요.

5. 사인법칙과 넓이 공식으로 $R = \frac{AD \cdot AE \cdot DE}{4\Delta}$예요. 값을 넣으면 $R = \frac{13 \times 4}{24} = \frac{13}{6}$이에요.

6. 구할 값은 $R^2 = \frac{169}{36}$예요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

11번 정답 ③

1. $y=(x-1)(x-3)$이므로 $0\le x\le 1$에서 $y\ge 0$, $1\le x\le 3$에서 $y\le 0$이에요.

2. $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$로 놓으면 $F'(x)=x^2-4x+3$, $F(0)=F(3)=0$, $F(1)=\frac{4}{3}$예요.

3. $0\le t\le 1$에서는 $A(t)=F(t)$이고, $1\le t\le 3$에서는 $A(t)=\frac{8}{3}-F(t)$예요.

4. 첫 구간에서 $H'(t)=t^2-4t+2$이므로 H는 $t=2-\sqrt{2}$까지 증가하고 그 뒤에는 감소해요.

5. 둘째 구간에서는 $H'(t)=-(t-2)^2\le 0$이므로 계속 감소해요. $t=2$에서 미분계수는 0이지만 증가로 바뀌지는 않아요.

6. 최댓값은 $M=H(2-\sqrt{2})=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$예요. 양 끝의 값 $H(0)=0$, $H(3)=-\frac{1}{3}$을 비교하면 최솟값은 $m=-\frac{1}{3}$이에요.

7. 두 값의 차는 $M-m=\frac{4\sqrt{2}-3}{3}$이에요.

12번 정답 ②

1. $u=\log_2 x$라고 하면 $2<x<32$는 $1<u<5$와 같아요. 이차식 $P(u)=u^2-au+a+1$의 두 근이 모두 $(1,5)$에 있어야 해요.

2. 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $a^2-4a-4>0$이어야 해요. a가 양수이므로 $a>2+2\sqrt{2}$를 얻어요.

3. 두 근의 가운데인 꼭짓점의 u좌표가 구간 안에 있어야 하므로 $1<\frac{a}{2}<5$예요.

4. 양 끝에서는 $P(1)=2>0$, $P(5)=26-4a>0$이어야 해요. 따라서 $a<\frac{13}{2}$이에요.

5. 판별식이 양수이고 꼭짓점이 구간 안에 있으며 양 끝의 함수값이 양수이면 두 근이 모두 구간 안에 있어요. 조건을 모으면 $2+2\sqrt{2}<a<\frac{13}{2}$이에요.

6. 해당 자연수는 $5, 6$이고, 합은 11이에요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

13번 정답 ①

1. $x^3-3x^2+4=(x-2)(x^2-x-2)$예요. $x=2$는 모든 자연수 m에 대해 해예요.

2. $x\neq 2$에서는 양변을 $|x-2|$로 나누면 $|x^2-x-2|=\frac{m}{4}$이에요. $m>0$이므로 새로 얻는 근은 2와 겹치지 않아요.

3. $x^2-x-2=\frac{m}{4}$의 두 근 중 양의 근은 $\frac{1+\sqrt{9+m}}{2}$으로 쓸 수 있어요. 음의 근은 구간 밖이고, 양의 근이 3 이하인 조건은 $m\le 16$이에요.

4. $x^2-x-2=-\frac{m}{4}$의 판별식은 $9-m$이에요. $1\le m\le 7$이면 한 근만 구간 안에 있고, $m=8$이면 $0,1$이 모두 구간 안에 있어요.

5. $m=9$이면 중근 $\frac{1}{2}$ 하나를 세고, $m\ge 10$이면 이 방정식의 실근이 없어요.

6. 항상 있는 근 2까지 합치면 근 개수는 $1\le m\le 7$에서 3, $m=8$에서 4, $m=9$에서 3, $10\le m\le 16$에서 2, $m\ge 17$에서 1이에요.

7. 조건을 만족하는 값은 $1,2,3,4,5,6,7,9$예요. 합은 $28+9=37$이에요.

14번 정답 ④

1. 다음 항이 t라고 할 때 이전 항을 거꾸로 찾아요. 짝수였던 이전 항은 항상 $2t$예요.

2. 홀수였던 이전 항은 $t-3$이에요. 이 값이 양의 홀수이려면 t가 4 이상의 짝수여야 해요. 이 조건을 매 단계 확인해요.

3. $a_5=10$에서 가능한 a_4는 $7, 20$이에요. 가능한 a_3는 $14, 17, 40$이에요.

4. 가능한 a_2는 $11, 28, 34, 37, 80$이에요. 예를 들어 17 앞에는 34만 가능하고, 14 앞에는 $11, 28$이 가능해요.

5. 마지막으로 가능한 a_1은 $22, 25, 31, 56, 68, 74, 77, 160$이에요. 각 단계에서 짝수·홀수 조건을 적용했으므로 빠진 역방향 가지가 없어요.

6. 직접 나열해도 돼요: $(22, 11, 14, 7, 10)$, $(25, 28, 14, 7, 10)$, $(31, 34, 17, 20, 10)$, $(56, 28, 14, 7, 10)$, $(68, 34, 17, 20, 10)$, $(74, 37, 40, 20, 10)$, $(77, 80, 40, 20, 10)$, $(160, 80, 40, 20, 10)$이에요.

7. 첫째항을 한 번씩 더하면 $22+25+31+56+68+74+77+160=513$이에요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

15번 정답 ③

1. $m=\frac{a+b}{2}$, $d=\frac{b-a}{2}>0$으로 놓아요.
$f'(x)=3(x-a)(x-b)=3\{(x-m)^2-d^2\}$이에요.

2. 적분하면 어떤 상수 c에 대해
$f(x)=(x-m)^3-3d^2(x-m)+c$로 쓸 수 있어요.

3. $f(a)=c+2d^3$, $f(b)=c-2d^3$이므로 두 값의 합이 6이라는 조건에서 $c=3$이에요.

4. $m-d$부터 $m+d$까지 적분할 때 가운데 m을 기준으로 홀수차 항의 적분은 서로 없어져요. 남는 값은
$2dc=6d=12$이므로 $d=2$예요.

5. $f(0)=12$에서 $-m^3+12m+3=12$예요. 정리하면
$(m-3)(m^2+3m-3)=0$이에요.

6. $a=m-d>0$이므로 $m>2$예요. 이 범위에서는
$m^2+3m-3>0$이어서 $m=3$만 가능해요.

7. $f(x)=(x-3)^3-12(x-3)+3$이므로
$f(6)=27-36+3=-6$이에요. 구한 함수의 극대점과 극소점은 실제로 $1, 5$이고 모든 조건을 만족해요.

16번 정답 80

1. 공비를 r라고 하면 $r^3=\frac{a_5}{a_2}=27$이므로 실수 공비는
$r=3$이에요.

2. 첫째항은 $a_1=2$예요.

3. 따라서 합은 $2+6+18+54=80$이에요.

17번 정답 12

1. $f'(x)=9x^2+6x+k$예요.

2. $x=4$를 넣으면 $144+24+k=180$이므로 $k=12$예요.

18번 정답 5

1. 적분값은 $[x^3+ax]_0^2=8+2a$예요.

2. $8+2a=18$을 풀면 $a=5$예요.

19번 정답 225

1. 위치의 변화량은 속도의 정적분 $\int_2^4(6t^2+10t+17)\,dt$예요.

2. 한 부정적분은 $2t^3+5t^2+17t$예요. 양 끝에서의 값은 $276, 70$이에요.

3. 따라서 위치의 변화량은 206 m이고, 최종 위치는
$19+206=225$ m예요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

20번 정답 262

1. $u=\sin x$로 놓아요. 가능한 u는 $\frac{1}{2}$과 이차방정식 $8u^2-ku+1=0$의 근이에요.

2. $0\le x\le 4\pi$에서 $-1<u<1$, $u\neq 0$이면 $\sin x=u$의 해는 네 개예요. $u=\pm 1$이면 두 개, $u=0$이면 다섯 개예요.

3. 이차방정식의 근의 곱은 $\frac{1}{8}$이므로 0은 근이 아니에요. 실근이 총 12개이려면 서로 다른 세 u가 모두 $(-1,\,1)$ 안에 있어야 해요. 이차방정식의 근이 ± 1이면 그 사인값에 대응하는 해는 2개뿐이에요. 중근이거나 $\frac{1}{2}$과 겹치면 전체 해가 8개뿐이라 제외돼요.

4. 이차식의 판별식에서 $k^2-32>0$이에요. 두 근이 $(-1,\,1)$ 안에 있으려면 꼭짓점 $\frac{k}{16}$가 그 안에 있고 양 끝의 값 $9+k$, $9-k$가 양수여야 해요.

5. 이 조건들은 $\sqrt{32}<|k|<9$로 정리돼요. 정수 후보는 $-8,\ -7,\ -6, 6, 7, 8$이에요.

6. $u=\frac{1}{2}$을 이차식에 넣으면 $3-\frac{k}{2}$예요. $k=6$에서는 근이 겹치므로 제외해요. 나머지 다섯 후보는 서로 다른 세 내부 근을 가져요.

7. 구할 값은 $(-8)^2+(-7)^2+(-6)^2+7^2+8^2=262$예요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

21번 정답 3

1. $u = 2^x > 0$으로 놓고 $Q(u) = u^2 - (a+2)u + 2a$라고 해요. 서로 다른 실근의 개수는 $Q(u) = 2$와 $Q(u) = -2$의 양의 근을 합친 개수예요. 두 방정식의 근은 서로 겹치지 않아요.

2. $Q(u) = 2$의 판별식은 $(a-2)^2 + 8 > 0$이에요. 근의 곱이 $2a - 2$이므로 $a \le 1$이면 양의 근이 하나, $a > 1$이면 양의 근이 두 개예요. $a = 1$에서의 근 0은 제외해요.

3. $Q(u) = -2$의 판별식은 $(a-2)^2 - 8$이에요. $A = 2 - 2\sqrt{2}$, $B = 2 + 2\sqrt{2}$라고 놓고 근의 합 $a + 2$, 곱 $2a + 2$를 함께 살펴요.

4. 이 방정식의 양의 근은 $a \le -1$에서 하나, $-1 < a < A$에서 두 개, $a = A$에서 하나, $A < a < B$에서 없어요. $a = B$에서는 하나, $a > B$에서는 두 개예요. 중근은 한 번 세고 0은 제외해요.

5. 두 방정식의 근 개수를 합치면 전체 근이 두 개인 범위는 $a \le -1$, $a = A$, $1 < a < B$예요.

6. $a \le -1$이면 $Q(1) = a - 1 \le -2$, $Q(2) = 0$, $Q(3) = 3 - a \ge 4$예요. 두 양의 근은 각각 $[1, 2)$와 $(2, 3)$에 있으므로 큰 근을 작은 근으로 나눈 값이 3보다 작아요. 하지만 $\beta - \alpha = 2$이면 그 비가 4여야 하므로 이 범위는 제외돼요.

7. $a = A$일 때 두 양의 근은 $2 - \sqrt{2}$, $4 - \sqrt{2}$이고 그 비는 $3 + \sqrt{2} \ne 4$예요. 이 값도 제외해요.

8. $1 < a < B$에서는 두 양의 근 $u_1 < u_2$가 모두 $Q(u) = 2$의 근이에요. $u_2 = 4u_1$이고 근의 합과 곱은 $a + 2$, $2a - 2$예요.

9. 이에 따라 $4(a+2)^2 = 25(2a-2)$이고, 정리하면 $(a-3)(2a-11) = 0$이에요.

10. $a = \frac{11}{2}$은 B보다 커서 조건에 맞지 않아요. $a = 3$에서는 두 양의 근이 $1, 4$이고 원래 실근은 $0, 2$예요. 모든 조건을 만족하므로 답은 3이에요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

22번 정답 54

1. $N(5)=5$이므로 f는 서로 다른 두 극점을 가져요. 극값의 부호가 같거나 한 극값이 0이면 양의 높이에서 $|f(x)|=t$의 근이 다섯 개일 수 없어요. 극댓값을 $M>0$, 극솟값을 $-L<0$이라고 해요.

2. $M\neq L$일 때 작은 높이에서는 두 수평선이 각각 세 번 만나고, 작은 임계높이에서 5개, 두 높이 사이에서 4개, 큰 임계높이에서 3개, 그 위에서 2개예요. $M=L$이면 그 높이에서 4개여서 제외돼요. 따라서 $\min(M,L)=5$, $\max(M,L)=-3f'(0)>5$예요.

3. $f'(0)<0$이므로 두 극점은 $-u, v$로 쓸 수 있고 $u,v>0$이에요. $f(0)=0$까지 사용하면 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}(u-v)x^2-3uvx$예요.

4. 두 극값의 크기는 $M=\frac{u^2(u+3v)}{2}$, $L=\frac{v^2(v+3u)}{2}$예요. 또 $-3f'(0)=9uv$예요. 구할 매개변수는 $\min(M,L)=5$, $\max(M,L)=9uv$를 함께 만족해야 해요.

5. $L-M=\frac{1}{2}(v-u)(v^2+4uv+u^2)$이므로 먼저 $0<u<v$인 경우를 살펴요. 이때 $L=9uv$에서 $v(v+3u)=18u$, 즉 $u=\frac{v^2}{3(6-v)}$이에요. 양수 조건과 $u<v$에서 $0<v<\frac{9}{2}$를 얻어요.

6. 이 범위에서 v가 증가하면 양수 v^2은 증가하고 양수 $6-v$는 감소해요. 따라서 $u=\frac{v^2}{3(6-v)}$은 엄격하게 증가해요. u,v가 모두 증가하므로 $\frac{u^2(u+3v)}{2}$도 엄격하게 증가해요. 이 값이 5가 되는 해는 많아야 하나예요.

7. $v=3$, $u=1$을 넣으면 작은 극값의 크기가 5이고 큰 극값의 크기가 $27=9uv$여서 모든 연립조건을 만족해요. 따라서 이 경우의 유일한 해는 $(u,v)=(1,3)$이에요. $u>v$인 경우는 두 값을 바꾼 $(3,1)$이에요.

8. 남은 두 함수는 x^3-3x^2-9x와 x^3+3x^2-9x예요. 조건 (다)의 적분 안은 연속이고 항상 음이 아니므로 $0\le x\le 2$에서 $f(x)\le 0$이어야 해요.

9. x^3+3x^2-9x는 $x=2$에서 $2>0$이므로 제외해요. $x^3-3x^2-9x=x(x^2-3x-9)$는 $0\le x\le 2$에서 $x^2-3x-9<0$이므로 $f(x)\le 0$이에요. 이 함수는 조건 (다)를 만족해요.

10. 남은 함수의 극값은 $5,\ -27$이고 $f'(0)=-9$예요. 실제로 $N(5)=5$이며 $N(t)=3$인 양수는 $27=-3f'(0)$뿐이에요.

11. 따라서 유일한 함수에서 $f(6)=216-108-54=54$예요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

23번 정답 ③

1. 공비의 절댓값이 1보다 작으므로 급수가 수렴해요.

2. 합은 $\frac{2}{1-1/3}=3$이에요.

24번 정답 ①

1. 합성함수의 미분법을 쓰면 $f'(x)=3(2x+1)^2\times 2=6(2x+1)^2$예요.

2. 따라서 $f'(1)=6\times 9=54$예요.

25번 정답 ②

1. $\frac{\sin 3x}{\tan 2x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot\frac{3}{2}$로 나눠 써요.

2. $x\to 0$일 때 앞의 세 인수는 각각 1로 수렴해요.

3. 따라서 극한값은 $\frac{3}{2}$이에요.

26번 정답 ①

1. $u=1+e^x$로 치환하면 $du=e^x\,dx$예요.

2. $x=0$일 때 $u=2$, $x=\ln 2$일 때 $u=3$이에요.

3. 따라서 적분값은 $\int_2^3 u^{-2}\,du=[-u^{-1}]_2^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이에요.

27번 정답 ⑤

1. 첫째항을 a라고 하면 $\frac{a}{1-r}=6$, $\frac{a}{1-r^2}=4$예요.

2. 두 등식을 나누면 $1+r=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$이므로 $r=\frac{1}{2}$이에요.

3. $a=6(1-r)=3$이고, 제곱한 항들의 급수는 첫째항 9, 공비 $\frac{1}{4}$인 등비급수예요.

4. 따라서 합은 $\frac{9}{1-1/4}=12$예요.

28번 정답 ④

1. $c=1-\ln 2$로 놓아요. $\frac{1}{2}<\ln 2<1$이므로 $0<c<\frac{1}{2}$이에요. 이 범위는 $\ln 2=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx$에서 확인할 수 있어요.

2. 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}-c>0$이고, 접선의 방정식은 $y=(\frac{1}{t}-c)x+\ln t-1$이에요.

3. x절편은 $\frac{t(1-\ln t)}{1-ct}$, y절편은 $\ln t-1<0$이에요. 그러므로 $S(t)=\frac{t(1-\ln t)^2}{2(1-ct)}$이에요.

4. 미분한 결과는 $S'(t)=\frac{(1-\ln t)(2ct-1-\ln t)}{2(1-ct)^2}$로 정리돼요.

5. $h(t)=2ct-1-\ln t$로 놓으면 $h'(t)=2c-\frac{1}{t}<0$이에요. 또 $h(\frac{1}{2})=c-1+\ln 2=0$이므로 이 영점은 하나뿐이에요.

6. $1-\ln t>0$이어서 S는 $t=\frac{1}{2}$까지 증가하고 그 뒤에는 감소해요.

7. 최댓값은 $S(\frac{1}{2})=\frac{(1+\ln 2)^2}{2(1+\ln 2)}=\frac{1+\ln 2}{2}$로 정리돼요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

29번 정답 256

1. $a_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{(a_n-\sqrt{3})^2}{2a_n}$이에요. $a_1>\sqrt{3}$에서 시작하므로 모든 항이 $\sqrt{3}$보다 커요.

2. $a_n-a_{n+1}=\frac{a_n^2-3}{2a_n}>0$이므로 수열은 감소하고 아래로 유계예요. 극한을 ℓ이라고 놓아 점화식에 넣으면 $\ell=\frac{1}{2}(\ell+\frac{3}{\ell})$에서 $\ell=\sqrt{3}$을 얻어요.

3. 곱을 P_n이라고 하면 $\ln P_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}a_n^2)$예요.

4. $0\le x\le 1$에서 $0\le \ln(1+a_n^2x)-\ln(1+3x)\le a_n^2-3$이에요. 이 차이가 0으로 가므로 합의 극한에서는 a_n^2을 3으로 바꿀 수 있어요.

5. 정적분과 급수의 관계를 적용하면 $\lim \ln P_n=\int_0^1 \ln(1+3x)\,dx=\frac{1}{3}\int_1^4 \ln u\,du$예요.

6. 부분적분을 이용해 계산하면 $\frac{1}{3}[u\ln u-u]_1^4=\frac{4}{3}\ln 4-1$이에요.

7. 지수함수의 연속성으로 $L=e^{-1}4^{4/3}$이에요. 구할 값은 $e^3L^3=4^4=256$이에요.

정답과 해설

식의 뜻과 사용한 조건을 함께 확인해요.

30번 정답 202

1. $u=\cos x$라고 놓으면 $f'(x)=P(u)=4bu^2+au+1-2b$예요. 증가 조건에서 $P(u)\ge 0$이 $[-1,1]$ 전체에서 성립해요.

2. 두 점의 도함수는 $1+b+\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $1+b-\frac{\sqrt{3}}{2}a$예요. 역함수 미분법을 조건 (가)에 적용하면 $(1+b)^2-\frac{3}{4}a^2=\frac{1}{81}$이에요. 이 식만으로는 b를 정할 수 없어요.

3. 조건 (나)를 만족하려면 P가 $(-1,1)$에 영점을 가져야 해요. 내부에서 음이 되지 않으므로 $b>0$이고 그 영점은 중근이에요. 판별식과 중근의 위치에서 $a^2=16b(1-2b)$, $\frac{1}{6}<b\le\frac{1}{2}$을 얻어요.

4. 이 식을 조건 (가)의 식에 넣으면 $(5b-1)^2=\frac{1}{81}$이에요. $b=\frac{2}{9}$일 때 $a=\pm\frac{4\sqrt{10}}{9}$, $b=\frac{8}{45}$일 때 $a=\pm\frac{8\sqrt{58}}{45}$로 정리돼요. 네 후보 모두 중근이 $(-1,1)$ 안에 있고 두 미분계수 곱도 조건 (가)에 맞아요.

5. $f(0)=0, f(\pi)=\pi$에서 치환과 부분적분을 하면 $\int_0^{\pi} g(t)\,dt=\int_0^{\pi} xf'(x)\,dx=\pi^2-\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{\pi^2}{2}-2a$예요. 조건 (다)는 $a<-\frac{7}{5}$과 같아요. $\frac{160}{81}=\frac{4000}{2025}>\frac{49}{25}=\frac{3969}{2025}>\frac{3712}{2025}$를 비교하면 $a=-\frac{4\sqrt{10}}{9}$, $b=\frac{2}{9}$만 남아요.

6. 이때 $f'(x)=\frac{8}{9}(\cos x-\frac{\sqrt{10}}{4})^2$이에요. 도함수는 한 내부 점에서만 0이고 나머지에서는 양수이므로 f는 실제로 증가해요.

7. $\cos c=\frac{\sqrt{10}}{4}$인 내부 점에서 $f'(c)=0$이에요. $x\to c$일 때 양수인 차분몫 $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$가 0으로 가므로 역함수의 차분몫은 무한히 커져요. 다른 내부 점에서는 역함수 미분법이 성립해 미분 불가능한 점은 정확히 하나예요.

8. $t=f(x)$로 치환하면 $I=\int_0^{\pi} x\cos x\,f'(x)\,dx$예요. $J_k=\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx$라고 놓아요.

9. 부분적분으로 $J_k=\frac{(-1)^k-1}{k^2}$이므로 $J_1=-2$, $J_2=0$, $J_3=-\frac{2}{9}$예요. 또 $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{4}$이에요.

10. $2\cos x\cos 2x=\cos 3x+\cos x$를 이용하면 $I=J_1+\frac{a\pi^2}{4}+b(J_1+J_3)=-\frac{202}{81}-\frac{\sqrt{10}\pi^2}{9}$이에요.

11. 구할 식은 $-81I+\frac{81a\pi^2}{4}=162+180b$로 정리돼요. $b=\frac{2}{9}$를 넣으면 202예요.